BA KW | Vorlesung

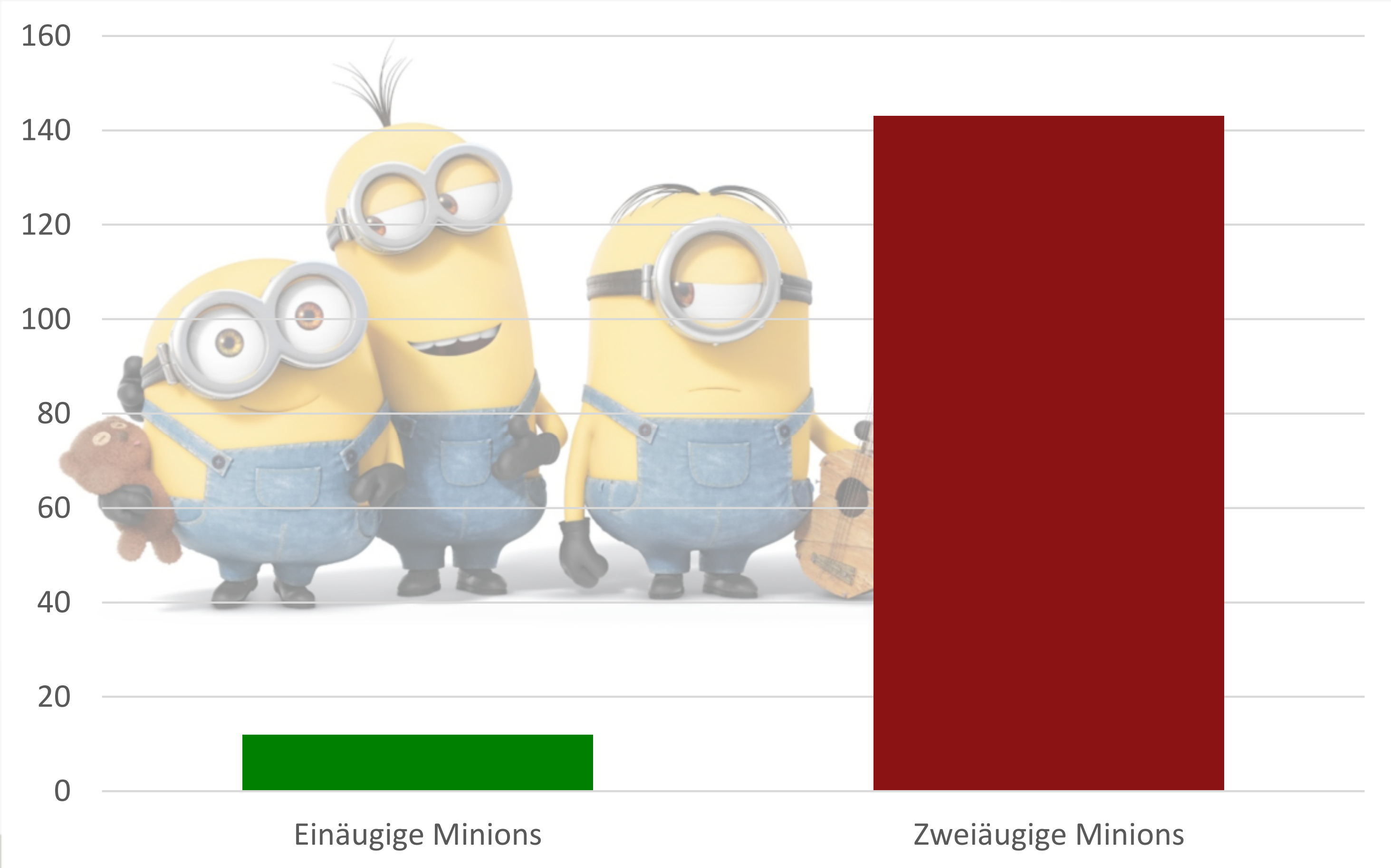
Einführung in die Statistik

Gruppenunterschiede 1: zwei Stichproben

Prof. Thomas Hanitzsch

Mittelwertvergleich: grafische Darstellung

- Täglicher Konsum von 3-D-Filmen bei Minions



Der t-Test für unabhängige Stichproben

- Funktion:
  - Generell prüft der t-Test, ob zwei Stichproben aus Grundgesamtheiten stammen, deren Parameter μ_1 und μ_2 identisch sind
  - Der t-Test für unabhängige Stichproben prüft, ob sich die Mittelwerte aus zwei Gruppen systematisch voneinander unterscheiden
- Formulierung der Hypothesen:

	$\boldsymbol{H_0}$	$\boldsymbol{H_1}$
Ungerichtet (zweiseitig)	$\mu_1 = \mu_2$ $\mu_1 - \mu_2 = 0$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$
Gerichtet (einseitig)	$\mu_1 \leq \mu_2$ $\mu_1 - \mu_2 \leq 0$	$\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 - \mu_2 > 0$

Der t-Test für unabhängige Stichproben

- Berechnung der Prüfgröße:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$$

  - Standardfehler der Mittelwertdifferenz:

$$SE_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{s_p^2 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$n_1 = n_2$:

$$s_p^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}$$

$n_1 \neq n_2$:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Der t-Test für unabhängige Stichproben

Signifikanztest:

- T ist unter H_0 t-verteilt mit $df = n_1 + n_2 - 2$ Freiheitsgraden
- Zweiseitiger Test:
    - Kritischer Wert entspricht dem $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$-Quantil der t-Verteilung
    - H_0 wird abgelehnt, wenn $|t| > t_{krit}$
- Einseitiger Test:
    - Kritischer Wert entspricht dem $(1 - \alpha)$-Quantil der t-Verteilung
    - H_0 wird abgelehnt, wenn $|t| > t_{krit}$

  → Gilt aber nur, wenn die Differenz in die vorhergesagten Richtung geht!

Der t-Test für unabhängige Stichproben

Effektstärke: Distanz zwischen Populationsmittelwerten

- Cohens *d*

$$d = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_p} = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}}$$

  - Standardisiertes Maß der Effektstärke
  - Konvention nach Cohen (1988):
    - $0{,}2 \leq |d| < 0{,}5$: geringer Effekt
    - $0{,}5 \leq |d| < 0{,}8$: mittlerer Effekt
    - $|d| \geq 0{,}8$: starker Effekt

Der t-Test für unabhängige Stichproben

Effektstärke: Varianzquotient

- Schätzung des Populationseffekts:

$$f_s^2 = \frac{t^2}{df}$$

- Anteil der Varianzaufklärung:

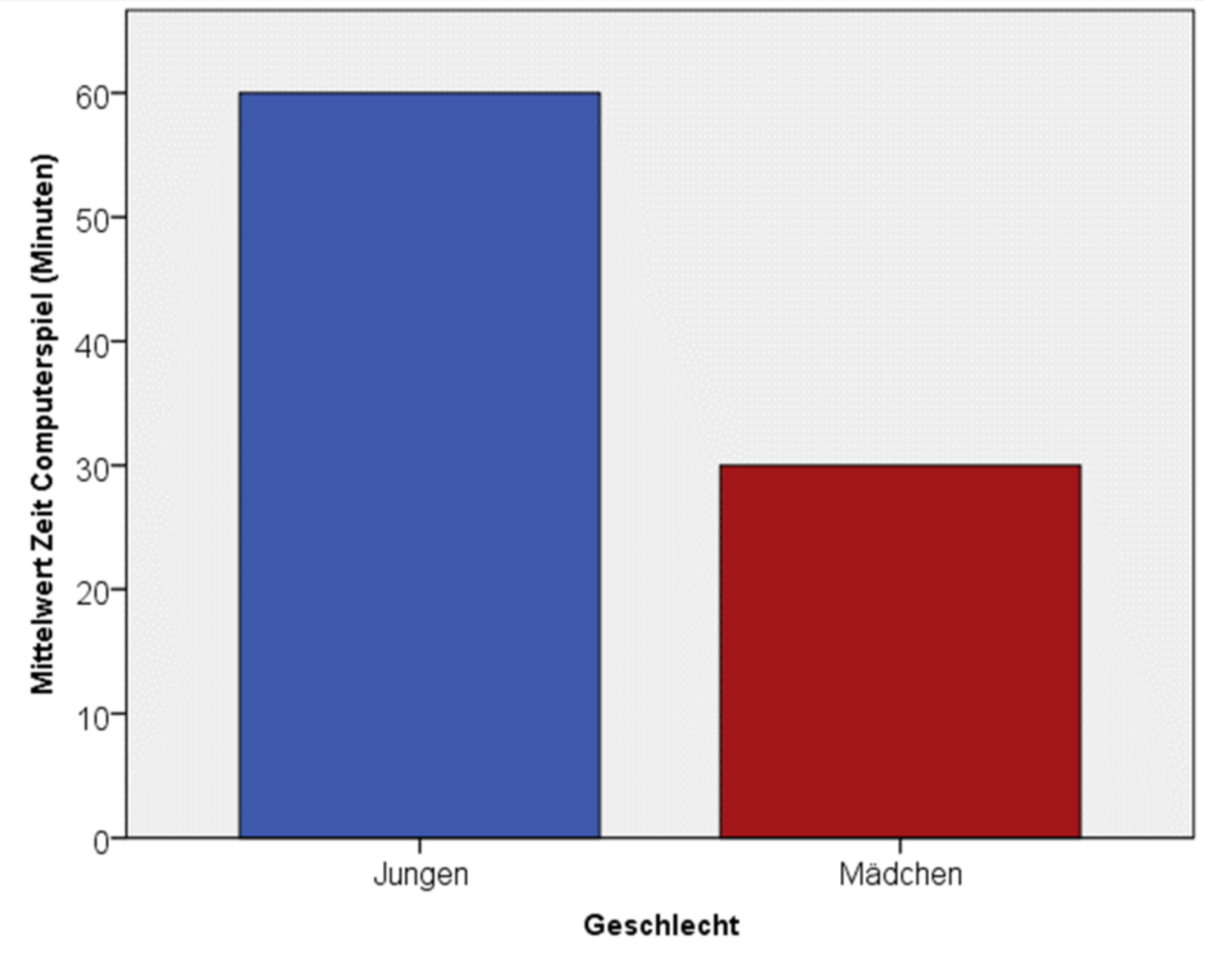
$$\eta^2 = \frac{f_s^2}{1 + f_s^2}$$

Der t-Test für unabhängige Stichproben: Beispiel

- Schuldirektor Fritz findet, dass die Kinder in seiner Schule zu viel Zeit mit Computerspielen verbringen. Er vermutet, dass Mädchen und Jungen unterschiedlich viel Zeit beim Computerspiel verbringen. Er zieht eine Stichprobe von jeweils 10 Mädchen und 10 Jungen. Das Signifikanzniveau legt er auf 5% fest ($\alpha = 0{,}05$).

	♂	♀
	10	0
	30	10
	80	20
	120	20
	70	40
	20	20
	90	60
	70	110
	60	0
	50	20
$\bar{x}$	60	30
s^2	1133,33	1111,11
n	10	10

Der t-Test für unabhängige Stichproben: Beispiel



	♂	♀
	10	0
	30	10
	80	20
	120	20
	70	40
	20	20
	90	60
	70	110
	60	0
	50	20
$\bar{x}$	60	30
s^2	1133,33	1111,11
n	10	10

	♂	♀
$\overline{x}$	60	30
s^2	1133,33	1111,11
n	10	10

Der t-Test für unabhängige Stichproben: Beispiel

1. Hypothesen:

$$H_0: \mu_J = \mu_M \qquad H_1: \mu_J \neq \mu_M$$

2. Berechnung der Prüfgröße (für $n_1 = n_2$):

$$SE_{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)} = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{\frac{1133{,}33 + 1111{,}11}{2} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)} = \mathbf{14{,}98}$$

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{SE_{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)}} = \frac{60 - 30}{14{,}98} = \mathbf{2{,}00}$$

	♂	♀
$\overline{x}$	60	30
s^2	1133,33	1111,11
n	10	10

Der t-Test für unabhängige Stichproben: Beispiel

3. Signifikanztest:

- Freiheitsgrade:

$$df = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 10 - 2 = \mathbf{18}$$

- Zweiseitiger Test bei $\alpha = 0{,}05$:

$$t_{krit} = \mathbf{2,10}$$

- Testentscheidung:

$$t = 2{,}0 < t_{krit} \rightarrow H_0 \text{ wird beibehalten}$$

	♂	♀
$\bar{x}$	60	30
s^2	1133,33	1111,11
n	10	10

Der t-Test für unabhängige Stichproben: Beispiel

Schuldirektor Fritz hat aber starke Anhaltspunkte für die Vermutung, dass Jungen mehr Zeit mit Computerspielen verbringen als Mädchen.

1. Hypothesen:

   $H_0: \mu_J \leq \mu_M$ $H_1: \mu_J > \mu_M$

2. Berechnung der Prüfgröße (für $n_1 = n_2$):

$$t = \mathbf{2,00}$$

	♂	♀
$\bar{x}$	60	30
s^2	1133,33	1111,11
n	10	10

Der t-Test für unabhängige Stichproben: Beispiel

3. Signifikanztest:
   - Prüfgröße: $t = 2{,}00$; Freiheitsgrade: $df = 18$
   - Einseitiger Test bei $\alpha = 0{,}05$: $t_{krit} = 1{,}73$
   - Testentscheidung:
     $t = 2{,}0 > t_{krit}$ → H_0 wird abgelehnt

	♂	♀
$\bar{x}$	60	30
s^2	1133,33	1111,11
n	10	10

Der t-Test für unabhängige Stichproben: Beispiel

4. Effektstärke:

$$d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}} = \frac{60 - 30}{\sqrt{\frac{1133{,}33 + 1111{,}11}{2}}} = \mathbf{0,90}$$

$$f_S^2 = \frac{t^2}{df} = \frac{4}{18} = 0{,}22 \rightarrow \eta^2 = \frac{f_S^2}{1+f_S^2} = \frac{0{,}22}{1+0{,}22} = \mathbf{0,18}$$

5. Bericht: Die Hypothese konnte bestätigt werden. An Direktor Fritz‘ Schule verbringen Jungen signifikant mehr Zeit mit Computerspielen als Mädchen. Das Geschlecht hat einen starken Effekt und erklärt 18 Prozent der Varianz ($\bar{x}_J = 60$; $\bar{x}_M = 30$; $t = 2{,}00$; $df = 18$; $p < 0{,}05$; $d = 0{,}90$; $\eta^2 = 0{,}18$).

Der t-Test für unabhängige Stichproben

Voraussetzungen:

- Die beiden Populationen sind unabhängig (d.h. Gruppen sind überschneidungsfrei)
- Die abhängige Variable besitzt metrisches Skalenniveau (im Ausnahmefall auch ordinales Skalenniveau bei $k > 4$ Ausprägungen)
- Das untersuchte Merkmal ist in beiden Populationen normalverteilt (zentraler Grenzwertsatz: Voraussetzung kann bei $n_1, n_2 > 30$ fallen gelassen werden)
- Die Varianzen sind in beiden Populationen gleich (Varianzhomogenität)

- Aber: Test reagiert allgemein relativ robust auf Verletzung der Annahmen

Varianzhomogenität

Levene-Test

- Ist ein Signifikanztest, der auf Gleichheit der Varianzen (Varianzhomogenität) von zwei oder mehr Populationen prüft
- Ist der Test signifikant (d.h. $p < 0{,}05$), unterscheiden sich höchtwahrscheinlich die Varianzen der beiden Populationen und es muss eine Korrektur der Freiheitsgrade vorgenommen werden
- Bei SPSS-Auswertungen muss dann der t-Wert (und die entsprechenden Freiheitsgrade) aus der Zeile „Varianzen sind nicht gleich“ verwendet werden

Der t-Test für abhängige Stichproben

- Funktion:
  - Prüft, ob sich die Mittelwerte in zwei verbundenen Stichproben systematisch voneinander unterscheiden
  - z.B. bei gepaarten Beobachtungen und Messwiederholungen
- Formulierung der Hypothesen:

	$\boldsymbol{H_0}$	$\boldsymbol{H_1}$
Ungerichtet (zweiseitig)	$\mu_1 = \mu_2$ $\mu_1 - \mu_2 = 0$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$
Gerichtet (einseitig)	$\mu_1 \leq \mu_2$ $\mu_1 - \mu_2 \leq 0$	$\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 - \mu_2 > 0$

Der t-Test für abhängige Stichproben

- Es interessiert die Differenz der Messwerte: $d_i = x_{i1} - x_{i2}$

  → Stichprobenkennwert: $\bar{x}_d = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i}{N} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$

- Berechnung der Prüfgröße:

$$t = \sqrt{N} \cdot \frac{\bar{x}_d}{s_d} \quad \text{mit} \quad s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(d_i - \bar{x}_d)^2}{N-1}}$$

  - Bestimmung der Freiheitsgrade: $df = N - 1$
  - Bestimmung der Effektstärke d_Z und η_p^2:

$$d_Z = \frac{|\bar{x}_d|}{s_d} \qquad \eta_p^2 = \frac{f_S^2}{1+f_S^2} \quad \text{bei} \quad f_S^2 = \frac{t^2}{df}$$

Der t-Test für abhängige Stichproben: Beispiel

- Es wird vermutet, dass Werbung für Bananen bei Minions den Appetit auf Bananen steigert. Ein Forscher führt im Auftrag eines Bananenproduzenten ein entsprechendes Vorher-Nachher-Experiment durch, bei dem sich die teilnehmenden Minions eine anregende Bananenwerbung ansehen. Zusätzlich sollten die Versuchspersonen jeweils vorher und nachher ihren Appetit auf Bananen auf einer 10-stufigen Skala angegeben. Der Forscher legt das Signifikanzniveau auf 5% fest (α=0,05).

	vorher	nachher
	4	6
	6	7
	3	8
	7	7
	2	4
	8	7
	3	6
	5	6
	6	8
	4	5
$\bar{x}$	4,8	6,4
s^2	3,73	1,6
N	10	

	vorher	nachher
$\bar{x}$	4,8	6,4
s^2	3,73	1,6
N	10	

Der t-Test für abhängige Stichproben: Beispiel

1. Hypothesen:

$$H_0: \mu_{nachher} \leq \mu_{vorher} \qquad H_1: \mu_{nachher} > \mu_{vorher}$$

2. Stichprobenkennwert:

$$\bar{x}_d = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i}{N} = \bar{x}_{nachher} - \bar{x}_{vorher} = 6{,}4 - 4{,}8 = \mathbf{1{,}6}$$

Anmerkung:
Für die Berechnung des t-Wertes macht es keinen Unterschied, wie wir die Differenz $\bar{x}_d$ berechnen ($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ oder $\bar{x}_2 - \bar{x}_1$). Im Beispiel vermuten wir, dass $\mu_{nachher} > \mu_{vorher}$. Um ein intuitives Verständnis zu ermöglichen, setzen wir: $\bar{x}_1 = \bar{x}_{nachher}$ und $\bar{x}_2 = \bar{x}_{vorher}$. Damit würden wir ein $\bar{x}_d > 0$ erwarten.

	vorher	nachher
$\overline{x}$	4,8	6,4
s^2	3,73	1,6
$\overline{x}_d$	1,6	
N	10	

Der t-Test für abhängige Stichproben: Beispiel

3. Berechnung der Prüfgröße:

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(d_i - \overline{x}_d)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{24{,}4}{9}} = 1{,}65$$

vorher (x_v)	nachher (x_n)	d_i ($x_n - x_v$)	$d_i - \overline{x}_d$	$(d_i - \overline{x}_d)^2$	$\sum(d_i - \overline{x}_d)^2$
4	6	2	0,4	0,16	
6	7	1	-0,6	0,36	
3	8	5	3,4	11,56	
7	7	0	-1,6	2,56	
2	4	2	0,4	0,16	
8	7	-1	-2,6	6,76	
3	6	3	1,4	1,96	
5	6	1	-0,6	0,36	
6	8	2	0,4	0,16	
4	5	1	-0,6	0,36	**24,4**

	vorher	nachher
$\bar{x}$	4,8	6,4
s^2	3,73	1,6
$\bar{x}_d$	1,6	
s_d	1,65	
N	10	

Der t-Test für abhängige Stichproben: Beispiel

3. Berechnung der Prüfgröße:

$$t = \sqrt{N} \cdot \frac{\bar{x}_d}{s_d} = \sqrt{10} \cdot \frac{1{,}6}{1{,}65} = \mathbf{3{,}07}$$

4. Signifikanztest:

- Freiheitsgrade:

$$df = N - 1 = 10 - 1 = \mathbf{9}$$

- Einseitiger Test bei $\alpha = 0{,}05$:

$$t_{krit} = \mathbf{1{,}83}$$

- Testentscheidung:

$t > t_{krit}$ → H_0 wird abgelehnt

	vorher	nachher
$\overline{x}$	4,8	6,4
s^2	3,73	1,6
$\overline{x}_d$	1,6	
s_d	1,65	
N	10	

Der t-Test für abhängige Stichproben: Beispiel

5. Berechnung der Effektstärke:

$$d_Z = \frac{|\overline{x}_d|}{s_d} = \frac{1{,}6}{1{,}65} = \mathbf{0{,}97}$$

$$f_S^2 = \frac{t^2}{df} = \frac{3{,}07^2}{9} = 1{,}05 \rightarrow \eta_p^2 = \frac{f_S^2}{1+f_S^2} = \frac{1{,}05}{1+1{,}05} = \mathbf{0{,}51}$$

6. Bericht:

Die Hypothese konnte bestätigt werden. Die gezeigte Bananenwerbung hat bei Minions einen signifikant positiven Einfluss auf den Appetit auf Bananen. Der Effekt erklärt 51% der empirischen Varianz ($d_z = 0{,}97$; $\eta_p^2 = 0{,}51$).

Der t-Test für abhängige Stichproben

Voraussetzungen:

- Die abhängige Variable besitzt metrisches Skalenniveau
  (im Ausnahmefall auch ordinales Skalenniveau bei $k > 4$ Ausprägungen)
- Die Differenzen der Wertepaare sind der Population normalverteilt (zentraler Grenzwertsatz: Voraussetzung kann bei $n > 30$ Beobachtungspaare fallen gelassen werden)

- Aber: Test reagiert relativ robust auf Verletzung der Annahmen

Aufgabe 1

- In einer Stichprobe sehen Männer pro Tag länger fern (n = 10; $\overline{x}$ = 90 Minuten, s^2 = 600) als Frauen (n = 10; $\overline{x}$ = 60 Minuten, s^2 = 605,56). Lässt sich auf dieser Basis sagen, dass das Geschlecht einen Einfluss auf die TV-Nutzungsdauer hat? (Signifikanzniveau 5%)
- Berechnen Sie die Prüfgröße, Cohens d und den Anteil der Varianzaufklärung.